On Strongly Invertible Knots

数理解析研究所講究録
518巻 1984年 117-130

On Strongly Invertible Knots

大阪市大 理　作間　誠(*)
Makoto SAKUMA

向き付けられた3球面 S^3 上の knot K に対し、次の条件を満足する S^3 上の ori.-pres. involution h が存在する時、K は strongly invertible であると言う。

(1) $h(K) = K$

(2) Fix h は K と二点で交わる circle。

この報告では、strongly invertible knot に対して或る多項式不変量を定義し、それと equivariant prime decomposition 及び equivariant cobordism との関係を論ずる。その不変量は Alexander polynomial とは独立で、特に、自明な Alexander polynomial を持つ knot に対しても、一般には消えない。

§1. Strongly invertible knot は"沢山"ある。

このセクションでは strongly invertible knot に関してこれまでに知られている結果を述べる。

(*) 日本学術振興会奨励研究員

S^3上の ori.-pres. homeo. で K の向きを逆転するものが有る時、K を <u>invertible</u> という。勿論、strongly invertible なら invertible である。逆は、hyperbolic knot に関しては正しい([8, I])が、一般の knot に関しては正しくない([I, 6, 20])。 Fox [3] は、non-invertible knot は存在するか？という問題を提出したが、それは Trotter [18] がある種の pretzel knot の non-invertibility を証明する事により解決した。しかし、一般的な判定法は '70年代終りの Kawauchi [8], Hartley [7], Bonahon-Siebenmann [2] 等の仕事まで待たなくてはならなかった。10 crossings までの knot の invertibility は Hartley [7] に依り、完全に決定された。それによると、9 crossings までの knot で non-invertible なのは 8_{17}, 9_{32}, 9_{33} のみ，又、10 crossings では 165個の prime knot があるが、その内 non-invertible なのは丁度 1/5 の 33個である。結局、10 crossings までの prime knot 249 個の内、non-invertible なのは 36 個で全体の約 14%。だけであり、残りの 213 個の knot は strongly invertible である。
Sakai [14] に依り証明された次の定理も、strongly invertible knot が"沢山"ある事を言っている。
(又、これが knot の non-invertibility の判定の難かしさ

を物語っている。)

<u>定理 (Sakai [14])</u> 任意の Alexander polynomial は strongly invertible knot の Alexander polynomial として実現できる。

§2. Strongly invertible knot と θ-curve

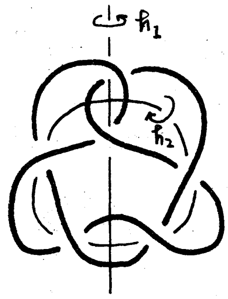
以下 strongly invertible knot K を、その strong. invertibility を与える S^3 上の involution h と対にして、(K, h) で表わす。 Waldhausen [19] に依り、h は S^3 の standard rotation と同値である。

<u>定義 1</u> (K_1, h_1) と (K_2, h_2) が同値であるとは、S^3 上の ori. pres. homeo f で次の条件を満たすものが有る時をいう。 [この時、$(K_1, h_1) \cong (K_2, h_2)$ と表わす。]

(1) $f(K_1) = K_2$

(2) $f \circ h_1 \circ f^{-1} = h_2$

<u>註</u> (1) 右の図でわかる様に、$K_1 \cong K_2$ であっても、$(K_1, h_1) \cong (K_2, h_2)$ となるとは限らない。

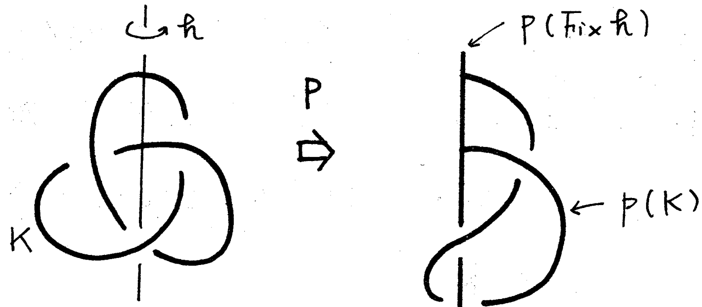


(2) Knot K を固定した時、その strong invertibility を与える involution は高々有限個である。(Kojima [9])

(3) Hyperbolic knot ではその様な involution は高々二つである (cf. [1, 16])

(K, h) を strongly invertible knot とする時、$p : S^3 \longrightarrow S^3/h \cong S^3$ を projection とする。

定義 2　$p(\mathrm{Fix}\, h) \cup p(K)$ を $\theta(K, h)$ で表わし、(K, h) に付随した θ-curve と呼ぶ。



(K, h)　　　　$\theta(K, h)$

Knot K の性質は、次の様に $\theta(K, h)$ の性質に反映する。（証明は [15] と同様の方法で出来る。）

定理 1

(1) (Marumoto [11]) K: trivial $\Leftrightarrow$ $\theta(K, h)$: trivial

(2) K: prime $\Leftrightarrow$ $\theta(K, h)$: irreducible

但し、θ-curve θ が irreducible であるとは、θ が local knot を持たなく、かつ prime (ie θ は non-trivial で、又 θ と 3 点で交わる任意の 2-sphere は一方で  を bound する) である事とする。

§3. Strongly invertible knot の同変一意分解

まず、二つの strongly invertible knots (K_i, h_i) $(i=1,2)$ の equivariant connected sum $(K_1, h_1) \# (K_2, h_2)$ を定義する。各 i $(i=1,2)$ に対し、z_i を $\mathrm{Fix}\, h_i \cap K_i$ の点、B_i を z_i の equivariant regular nbd. とし、$f: (\partial B_1, \partial B_1 \cap K_1) \to (\partial B_2, \partial B_2 \cap K_2)$ を ori.-rev. equivariant homeomorphism とする。この時 $\{(S^3, K_1) - (\mathring{B}_1, \mathring{B}_1 \cap K_1)\} \underset{f}{\cup} \{(S^3, K_2) - (\mathring{B}_2, \mathring{B}_2 \cap K_2)\}$ は $(S^3, K_1 \# K_2)$ を与え、その上には、$K_1 \# K_2$ の strong invertibility を与える involution $h = (h_1|_{S^3 - \mathring{B}_1}) \cup (h_2|_{S^3 - \mathring{B}_2})$ がある。この pair $(K_1 \# K_2, h)$ を $(K_1, h_1) \# (K_2, h_2)$ と定める。しかし、この定義には次の ambiguity がある。

(1) $z_i \in \mathrm{Fix}\, h_i \cap K_i \cong S^0$ $(i=1,2)$ の選び方。

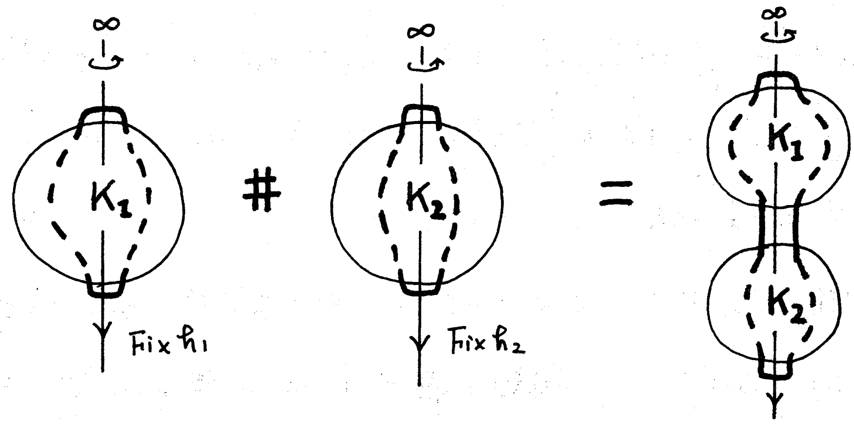
(2) Equivariant homeo. f の取り方。(f の equivariant isotopy class rel $\partial B_1 \cap K_1$ は f の $\partial B_1 \cap \mathrm{Fix}\, h_1$ 及び $\partial B_1 \cap K_1$ への制限で定まる。しかし、出来上がる connected sum の equivalence class は $f|\partial B_1 \cap K_1$ には依らない。)

従って、equivariant connected sum を定義するには、例えば次の様な情報を (K, h) に付加しておく必要がある。

(1) $\mathrm{Fix}\, h$ の向き $[\mathrm{Fix}\, h]$

(2) $\mathrm{Fix}\, h$ 上の "base point" ∞ $(\infty \notin K)$.

この情報付きの strongly invertible knot $\{(K, h), [\mathrm{Fix}\, h], \infty\}$ の connected sum を次の図の様に定義できる。



このセクションでは以下 (K, h) には上の情報が付いているものとする。Strongly invertible knot の列 $\{(K_i, h_i)\}_{i=1}^{n}$ に対して $\#_{i=1}^{n}(K_i, h_i) = (\cdots(((K_1, h_1)\#(K_2, h_2))\#(K_3, h_3))\#\cdots)\#(K_n, h_n)$ と定義する。この和は非可換である事に注意されたい。

(K, h) が上の意味で non-trivial strongly invertible knot

二つの和に表わせない時、(K, h) は prime であると言う。(K, h) が prime であるための必要十分条件は $\theta(K, h)$ が prime である事であり、それは定理1により次と同値である。

(1) K : prime, 又は

(2) $K = k \# k$ (k : prime) と表わせ、h はその factor を入れ替える involution。(これを以下 $D(k)$ で表わす。)

この時、次の一意分解定理が成り立つ。

定理2 (1) 任意の strongly invertible knot (K, h) は prime decomposition $\#_{i=1}^{m}(K_i, h_i)$ を持つ。又、この時、和は $\left(\#_{i=1}^{r}(K_i, h_i)\right) \# \left(\#_{j=1}^{s} D(k_j)\right)$ (K_i, k_j : prime) の形に直せる。

(2) $\left(\#_{i=1}^{r'}(K_i', h_i')\right) \# \left(\#_{j=1}^{s'} D(k_j')\right)$ をもう一つの prime decomposition とすると次が成り立つ。

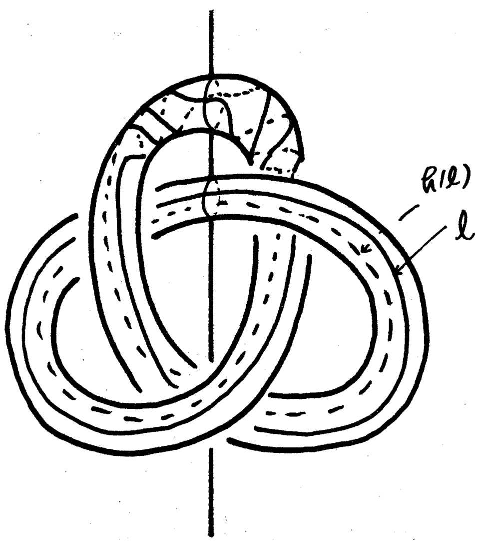
(i) $r = r'$, $(K_i, h_i) \cong (K_i', h_i')$ $(1 \leq i \leq r)$

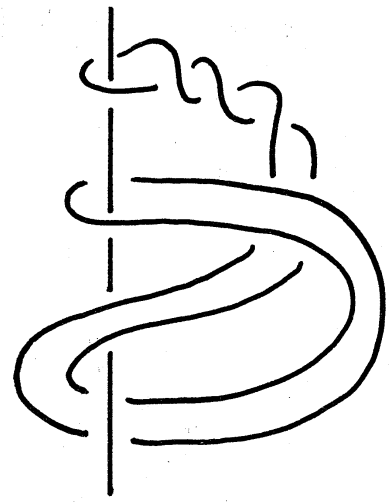
(ii) $s = s'$, 順番を適当に入れ替えれば $k_j \cong k_j'$.

この定理の証明は、θ-curve の unique prime decomposition を証明する事により成される。

§4. ある多項式不変量

Strongly invertible knot (K, h) に対し、$N(K)$ を K の equivariant regular nbd.、l を $N(K)$ の preferred longitude で $h(l) \cap l = \emptyset$ となるものとする。この時 $L(K, h) = p(\mathrm{Fix}\, h) \cup p(l) \subset S^3/h \cong S^3$ とおく。



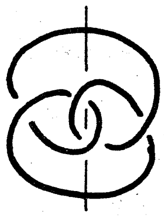


$L(K, h)$

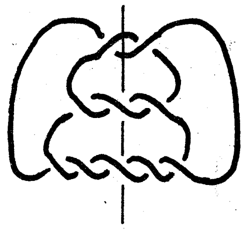
$L(K, h)$ は linking number が 0 の 2-component link であるので、Kojima-Yamasaki [10] (cf. [5]) の η-function が定義できる。($S^3 - p(\mathrm{Fix}\, h)$ の infinite cyclic cover $\cong S^1 \times D^2$ への $p(l)$ の lift 達の "$\mathbb{Z}\langle t\rangle$-linking number") これを (K, h) の <u>η-polynomial</u> と呼び $\eta_{(K,h)}(t)$ で表わす。

<u>例</u>

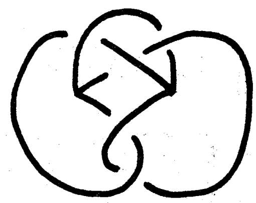
$$-t^{-2} + 2 - t^{2}$$



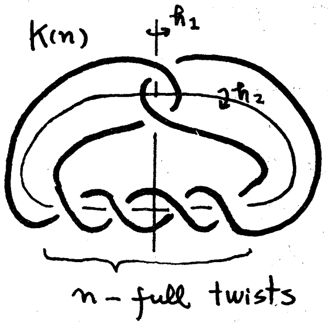
$$-t^{-3}+t^{-2}+t^{-1}-2+t+t^{2}-t^{3}$$



$$-2t^{-2}+4-2t^{2}$$



$\theta(K, h) =$ Kinoshita's θ-curve [ ]



$$\eta_{(K(n),h_1)}(t) = \left[\frac{n}{2}\right]t^{-3} - nt^{-2} - \left[\frac{n}{2}\right]t^{-1} + 2n - \left[\frac{n}{2}\right]t - nt^{2} + \left[\frac{n}{2}\right]t^{3}$$

$$\eta_{(K(n),h_2)}(t) = -t^{-(2n+1)} + t^{-2n} + t^{2n} - t^{(2n+1)}$$

(特に $(K(n),h_1) \neq (K(n),h_2)$)

<u>定理 3.</u> (1) $\eta_{(K,h)}(t)$ は次の条件を満足する。

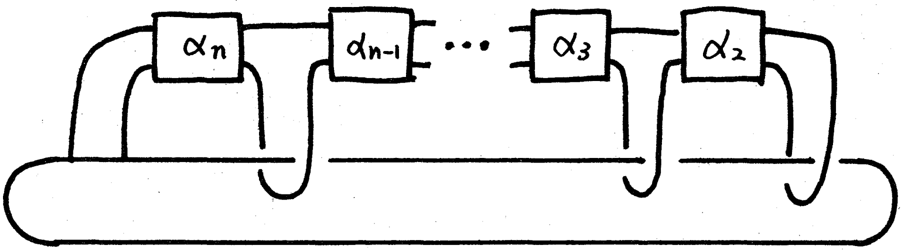
$$\begin{cases} \eta_{(K,h)}(t) = \eta_{(K,h)}(t^{-1}) \\ \eta_{(K,h)}(1) = \eta_{(K,h)}(-1) = 0 \end{cases}$$

(2) 逆に、上の条件を満足する整数係数 Laurent polynomial は或る strongly invertible knot の η-polynomial になる。

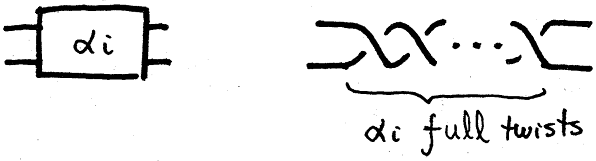
<u>証明</u> (1) 対称性と $\eta_{(K,h)}(1) = 0$ は η-function の一般的性質である (cf. [10])。 $\eta_{(K,h)}(-1)$ は、$\eta_{(K,h)}(t)$ を $\mathbb{Z}\langle t \mid t^2=1\rangle$ で見た時の t の係数が $p(l)$ の $(S^3, p(\mathrm{Fix}\, h))$ の double cover

$\cong S^3$ における逆像 $= l \cup h(l)$ の linking number $= 0$ に等しい事から出る。

(2) 次の図で表わされる θ-curve を $\theta(K, h)$ として持つ strongly invertible knot の η-polynomial を $\eta(t)$ とおく。



但し



すると、$\eta(t) = A^{(1)}(t) + \alpha_2(t^{-2}+t^{2}) + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i (t^{-i} - 2t^{-i+1} + t^{-i+2} + t^{i-2} - 2t^{i-1} + t^{i})$

(但し $A^{(1)}(t)$ は $\beta t^{-1} + \gamma + \beta t$ $(\beta, \gamma \in \mathbb{Z})$ の形の式で $\eta(1) = \eta(-1) = 0$ となる式として特徴付けられる。)

従って $\{\alpha_i\}_{2 \leq i \leq n}$ を適当に選べば (1) の条件を満足する多項式をすべて実現出来る。

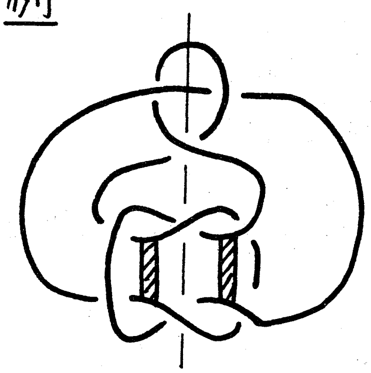
<u>註</u> 上の (2) の証明は本質的に Sakai [13] の議論と同じである。そこでは、任意の "Alexander polynomial" に対して、それを Alexander polynomial に持つ unknotting number 1 の knot が構成されているが、その knot は、上の例で $p(l)$ に沿って 1-surgery した時に $p(\mathrm{Fix}\, h)$ が作る knot に等しい。(cf. Proposition 4 of [4])。

§5. 同変コボルディズム

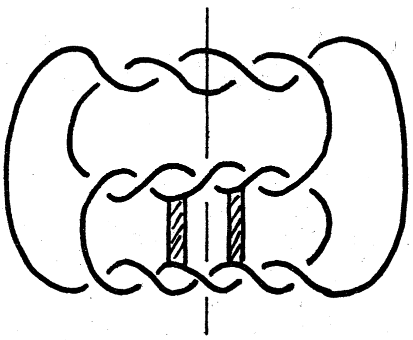
二つの strongly invertible knots (K_0, h_0) と (K_1, h_1) が equivariantly cobordant であるとは、次の条件を満足する $S^3 \times I$ 内の locally flat annulus A 及び $(S^3 \times I, A)$ 上の P.L. (or smooth) involution h が存在する事とする。

(*) $\partial\{(S^3 \times I, A), h\} = (K_0, h_0) \times 0 \cup (K_1, h_1) \times 1$

例



$8_{10} \sim 3_1$



$K(p, -p, 2r) \sim 0$

§3 で考えた情報付きの strongly invertible knot 全体から equivariantly cobordant なものを同一視して出来る集合 $\mathcal{EC}$ は演算 # に関して（非可換）群になるが、これに関して次が成り立つ。

定理 4. η-polynomial は群 $\mathcal{EC}$ から abel 群 $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ への準同型写像を与える。すなわち、

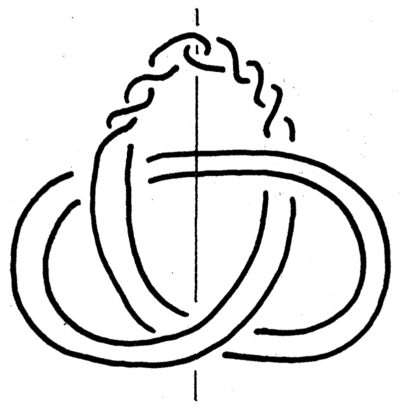
(1) $(K_0, h_0) \sim (K_1, h_1)$ (equivariantly cobordant)

ならば $\eta_{(K_0, h_0)}(t) = \eta_{(K_1, h_1)}(t)$.

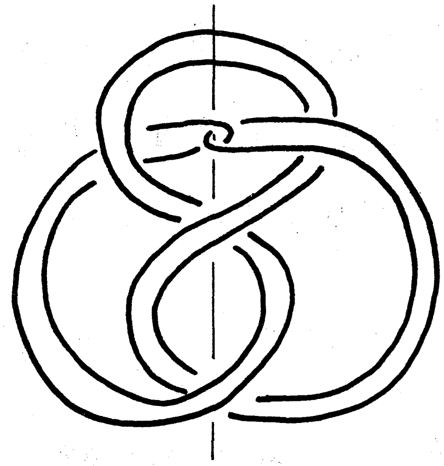
(2) $\eta_{(K_1, h_1)\#(K_2, h_2)}(t) = \eta_{(K_1, h_1)}(t) + \eta_{(K_2, h_2)}(t)$

証明 (1) $(K_0, h_0) \sim (K_1, h_1)$ ならば $L(K_0, h_0)$ と $L(K_1, h_1)$ が cobordant である事がわかる。従って η-function の cobordism に関する不変性より (1) を得る。

例 次の knot は equivariantly slice でない。



$\eta(t) = [6, 0, -4, 0, 1$



$\eta(t) = [-6, 2, 4, -3, -1, 1$

$\left(\text{但し } [a_0, a_1, \cdots, a_n = a_0 + \sum_{i>0} a_i (t^{-i} + t^{i})\right)$

上の二つの knot の Alexander polynomial は共に 1 である事に注意!

しかし、この equivariant cobordism と通常の knot cobordism の間には大きな差がある。例えば、6_1 knot は slice であるが、§4 の例 ($6_1 = K(2)$) からわかる様に、それは equivariant には slice でない。すなわち Ψ を $\mathcal{E}C$ から通常の knot cobordism group C への自然な写像とすると、$\mathrm{Ker}\,\Psi \neq \{1\}$ となる。最後に、次の問題を挙げておく。

<u>問題</u>　Ψ は全射か？　すなわち、任意の knot は strongly invertible knot に cobordant か？

References

[1] C.M. Boileau: Noeuds rigidement inversibles. preprint.

[2] F. Bonahon and L. Siebenmann: Algebraic knots. in preparation.

[3] R.H. Fox: Some problems in knot theory. Topology of 3-manifolds, pp.168-176, Prentice-Hall, New York, 1962.

[4] S. Furusawa and M. Sakuma: Dehn surgery on symmetric knots, to appear in Math. Sem. Notes, Kobe Univ.

[5] D. Goldsmith: A linking invariant of classical link concrdance. Lect. Notes in Math. 685, pp.135-170, Springer-Verlag, 1978.

[6] R. Hartley: Knots and involution. Math. Z. 171 (1980), 175-185.

[7] __________: Identifying non-invertible knots. Topology 22 (1982), 137-145.

[8] A. Kawauchi: The invertibility problem on amphicheiral excellent knots. Proc. Japan Acad. 55 (1979), 399-402.

[9] S. Kojima: Finiteness of symmetries of 3-manifolds. preprint

[10] __________ and M. Yamasaki: Some new invariants of links. Inv. Math. 54 (1979), 213-228.

[11] Y. Marumoto: Relations between some conjectures in knot theory. Math Sem. Notes, Kobe Univ. 5 (1977), 377-388.

[12] R. Riley: An elliptic path from parabolic representations to hyperbolic structures. Lect. Notes in Math. 722, pp.99-133, Springer-Verlag, 1979.

[13] T. Sakai: A remark on the Alexander polynomials of knots. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 5 (1977), 451-456.

[14] _________: Polynomials of invertible knots. Math. Ann. 266 (1983), 229-232.

[15] M. Sakuma: Periods of composite links. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 9 (1981), 445-452.

[16] __________: '83年までの古典的 knot theory. 代数幾何へ応用を見込んだトポロジー. pp. 35-140, 1983.

[17] W.P. Thurston: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull A.M.S. 6 (1982), 357-381.

[18] H.F. Trotter: Noninvertible knots exist. Topology 2 (1964), 275-280.

[19] F. Waldhausen: On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.

[20] W. Whitten: Inverting double knots: Pacific J. Math. 97 (1981), 209-216.